

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro “*Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*” es la parte práctica del libro anterior llamado “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil	1
Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.	
Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble	29
Christian Boissinotte	
Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones	49
José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.	
Capítulo 4: Horas de luz solar	63
Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.	
Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento	73
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas	83
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales	91
Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.	
Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización	101
José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.	
Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones	125
César Fabián Romero Félix	
Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura	149
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 11: Antenas telefónicas	162
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra	173
Fernando Hitt	
Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia	179
Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.	
Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles	187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales

Actividades didácticas

Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.¹

Problemática y propósitos de aprendizaje

Se presentan distintas actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática. Para ello, se parte de la noción de área variable en un contexto gráfico y dinámico creado con GeoGebra, y se promueve la exploración de propiedades de la integral (como función de acumulación) vinculadas al Teorema Fundamental del Cálculo, así como de propiedades elementales de la integral definida.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Integral, variación, visualización matemática, función, y representación gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: Función de acumulación, función área.

Nivel de estudios

Las actividades están diseñadas para estudiantes universitarios de ingeniería o de ciencias básicas.

Total de actividades y duración aproximada

2 actividades, para realizarse en un total de 6 sesiones de 50 a 60 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante
- Applets de GeoGebra para las actividades,
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 5.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)

Método o recomendaciones de enseñanza

Las actividades requieren que el estudiante tenga experiencia con el uso de gráficas de funciones y sus transformaciones elementales (producto por una constante, sumar una constante) gráfica

¹ Universidad de Sonora, México.

Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales

y algebraicamente. También, se requiere experiencia básica en GeoGebra como: activar rastro de puntos, activar casillas, escribir expresiones algebraicas, usar deslizadores y arrastrar puntos.

- **Actividad 1:** Se propone que el estudiante trabaje con funciones positivas sencillas en el intervalo $[0, x]$, con el propósito de que el estudiante identifique, para una función f , su correspondiente función de área $A(x)$ y relacione ambas funciones a través de la siguiente relación que involucra la derivada de A : $A'(x) = f$. En la actividad 1 se inicia con funciones constantes, siguiendo con funciones lineales.
- **Actividad 2:** Se plantean situaciones problema en un contexto de movimiento, buscando que los estudiantes relacionen claro función área de la actividad 1 con la distancia recorrida por un objeto móvil para funciones de velocidad constantes, lineales y cuadráticas.

Actividad 1: La función de área

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Abre el archivo de GeoGebra ACTIVIDAD 1 y lee con cuidado lo que se solicita que realices.

En cada bloque se indica si debes trabajar de manera individual o en equipo. Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 (Trabajo Individual, 15 minutos)



1. La Gráfica roja representa la función constante $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, x]$. Desliza el punto de color rosa cuya abscisa representa el valor de x . ¿Qué pasa con la gráfica de f conforme varía x ?

2. Activa la casilla “Mostrar región” y contesta lo siguiente: ¿Cómo cambia el área A de la región sombreada al variar x ? ¿Por cada unidad que aumenta x , cómo varía el área A ? Puedes elaborar una tabla de valores para el área A de acuerdo con los valores de x para apoyarte.

3. Si consideramos que el área A es una función de x , ¿cuál función es? Justifica tu respuesta.

Bloque 2 (Trabajo en Equipo, 25 minutos)



4. Activen la casilla “Par ordenado” y hagan variar x , aparecerá un punto P ¿Qué representan las coordenadas de P?

5. Activen el rastro de P y observen la gráfica que traza al variar x ¿Qué función creen que sea?

Activa la casilla “Expresión algebraica”, aparecerá un espacio en blanco para que escriban la expresión algebraica de la función cuya gráfica traza el punto P, y se mostrará la gráfica correspondiente a la expresión que escriban.

6. ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la gráfica trazada por el punto P? Expliquen cómo llegaron a esa conclusión.

7. En los siguientes ejercicios, con ayuda de GeoGebra, encuentren la expresión algebraica de la función trazada por el punto P, a la que llamaremos $A(x)$.

$f(x) = 3$		$f(x) = k$
$A(x) = \underline{\hspace{2cm}}$		$A(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

8. ¿Qué relación encuentran entre las funciones f y A ? Expliquen detalladamente.

Bloque 3 (Discusión Grupal, 15 minutos)



9. Comparen sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Bloque 4 (Trabajo en equipo, 30 minutos)



10. Ahora, con ayuda del archivo de GeoGebra, grafiquen una función lineal en el intervalo $[0, x]$ y contesten lo siguiente: ¿Cómo cambia el área A de la región sombreada al variar x ? ¿Por cada unidad que aumenta x , cómo varía el área A ? Anoten sus cálculos.

11. ¿Qué tipo de función es A ? Determinen su expresión algebraica.

12. Elijan una función lineal diferente en el intervalo $[0, x]$ y determinen la expresión algebraica correspondiente a A .

Bloque 5 (Discusión Grupal, 25 minutos)



Compartan al grupo las funciones f que eligieron en tu equipo y las funciones A que le corresponden a cada una.

13. ¿Encuentras alguna relación importante que se cumpla entre las funciones f y A que eligieron otros equipos? ¿Cuál? Explica detalladamente.

14. Para una función lineal $f(x) = kx$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[0, x]$?

Bloque 6 (Trabajo en equipo, 35 minutos)



Ahora, con ayuda de GeoGebra, exploren qué pasa con la función área A correspondiente a una función f cuando el intervalo considerado no inicia en cero, sino en otro valor a , es decir, si ahora es el intervalo $[a, x]$ y contesten lo siguiente:

15. Para una función constante $f(x) = k$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[a, x]$? Expliquen cómo hicieron para llegar a esta respuesta.

16. Para una función lineal $f(x) = kx$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[a, x]$? Expliquen cómo hicieron para llegar a esta respuesta.

Bloque 7 (Discusión Grupal, 25 minutos)



17. Comparen sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Actividad 2: función de área en un contexto de movimiento

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Abre el archivo de GeoGebra ACTIVIDAD 2 y lee con cuidado lo que se solicita que realices.

En cada bloque se indica si debes trabajar de manera individual o en equipo. Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1: (Trabajo Individual, 10 minutos)



Un cuerpo se mueve en línea recta de tal forma que la gráfica de su velocidad (en m/seg) con respecto al tiempo (en seg), se muestra en la siguiente gráfica. Contesta lo que se solicita.

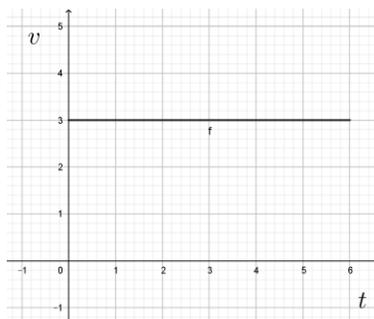


Figura 1

1. ¿Cuál es su velocidad a los 3 segundos de movimiento? ¿Y a los 5 segundos?

2. ¿Puedes determinar la distancia recorrida por el objeto al moverse durante los seis segundos que se muestran en la gráfica?

3. ¿Y si aumentamos el tiempo a 7 seg, qué sucede con la distancia recorrida, cuánto es ahora su valor? ¿Y a los 8 seg? ¿Qué sucede conforme aumentamos el tiempo de observación?

Bloque 2 (Trabajo en Equipo, 25 minutos)



4. Discuten sus respuestas a las preguntas del bloque anterior y lleguen a un consenso.
5. ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida por el objeto durante cada tiempo considerado?

6. ¿Cómo se representa gráficamente esa distancia y qué sucede conforme aumentamos el tiempo de observación?

Bloque 3 (Discusión Grupal, 20 minutos)

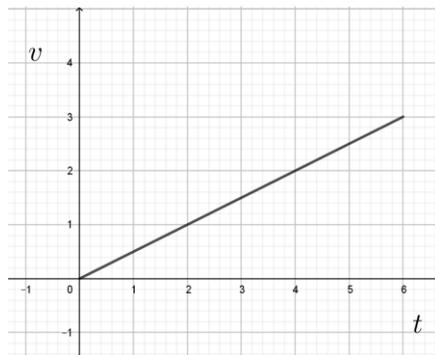


7. Discutan sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Bloque 4: (Trabajo en equipo, 35 minutos)



Un cuerpo se mueve en línea recta de tal forma que la gráfica de su velocidad (en m/seg) con respecto al tiempo (en seg), se muestra en la siguiente gráfica. Contesta lo que se solicita.



8. ¿Cuál es su velocidad a los tres segundos de movimiento? ¿Y a los 5 segundos?

9. ¿Puedes determinar la distancia recorrida por el objeto al moverse durante cierto tiempo, por ejemplo, después de 3 segundos de movimiento? ¿Y después de 4 segundos cuánto es la distancia recorrida? ¿Y después de 5 seg? ¿De 6 seg?

10. ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida por el objeto en cada intervalo de tiempo considerado? ¿Cómo se representa la distancia recorrida gráficamente?

Bloque 5 (Discusión Grupal, 25 minutos)



Discutan con los equipos sus respuestas al bloque anterior y lleguen a un consenso.

Bloque 6 (Trabajo en equipo, 40 minutos)



Una forma de asegurarnos de que nuestro cálculo de la distancia recorrida en cada intervalo considerado es correcto, consiste en hacer uso de nuestros conocimientos sobre el comportamiento de la velocidad, en tanto que la velocidad es la derivada de la posición. Veamos esto con mayor atención.

11. Escribe una expresión algebraica que represente a la velocidad del objeto con respecto al tiempo. Considerando que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, determina ahora una expresión para obtener la posición en cada instante.

12. ¿Cómo podemos obtener ahora la distancia recorrida en un intervalo tiempo considerado, por ejemplo, de 0 a 6 segundos de movimiento? ¿Y del segundo 6 al segundo 7? ¿Del segundo 0 al segundo 7?

13. Si en un intervalo del tiempo, el objeto se moviera con velocidad constante igual a la velocidad promedio durante ese intervalo, ¿qué sucedería con la distancia recorrida? Para verificar tu respuesta, determina la velocidad promedio en un recorrido de 0 a 7 segundos y calcula la distancia recorrida correspondiente.

14. Tomado en cuenta la linealidad de la velocidad con respecto al tiempo, ¿puedes determinar la velocidad promedio sin conocer la distancia recorrida? ¿Cómo lo harías?

Bloque 5 (Discusión Grupal, 20 minutos)



15. Compáren sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.